FUNDACIÓ CATALANA
D'ANALISTES FINANCERS

Combinaciones de préstamos e innovación financiera

Autor

Fernando Iniesta Soria

(*) ESTE TRABAJO OBTUVO EL PRIMER PREMIO EN 2018

PREMIOS DE INVESTIGACIÓN Y ESTUDIO RAFAEL TERMES CARRERÓ 2018

ISBN: 978-84-09-08630-6
Edita: Fundació Catalana d'Analistes Financers
Imprime: Reimpventa

Con esta publicación, la **Delegación para Catalunya del Instituto Español de Analistas Financieros** impulsa la difusión del trabajo "Combinaciones de préstamos e innovación financiera" que ha obtenido el primer premio de la III edición de los *Premios de Investigación y Estudio* RAFAEL TERMES CARRERÓ a sus asociados, a los profesionales de las finanzas y a todo el público interesado.

Son estos unos premios otorgados en memoria del fundador del Instituto, Don Rafael Termes (1918–2005) que iniciaron su andadura en el año 2016. La **Delegación para Catalunya del Instituto Español de Analistas Financieros** convoca estos premios cada año y dota sus premios con la contribución de la *Fundació Catalana d'Analistes Financers*[1].

Los *Premios de Investigación y Estudio* RAFAEL TERMES CARRERÓ persiguen estimular y reconocer la labor de investigación y estudio en el ámbito de actuación profesional del *analista financiero* con un enfoque centrado en su aplicación práctica.

Los temas objeto de investigación y estudio deben referirse al ámbito de actuación profesional del *analista financiero,* siempre que su contenido y alcance estén centrados, o tengan repercusiones significativas, en Europa y/o Latinoamérica.

Con la convocatoria de estos Premios y la publicación de los trabajos ganadores, esperamos seguir contribuyendo a la creación de valor para los miembros de nuestro Instituto, en particular, y para los profesionales de las finanzas, en general.

Cirus Andreu Cabot

Presidente de la Delegación para Catalunya
del Instituto Español de Analistas Financieros

[1] Para más información, se pueden consultar las Bases de los Premios en la web del IEAF: https://www.ieaf.es/publicaciones-y-premios/premios-rafael-termes-carrero.html

Combinaciones de préstamos e innovación financiera

ABSTRACT

En la actualidad muchos préstamos dirigidos tanto a particulares como a empresas y proyectos, no cubren perfectamente las necesidades de los prestatarios. Esto es debido, a que los ingresos o el flujo de caja libre de los prestatarios en muchas ocasiones no se adapta a los perfiles de pago de los tipos de préstamos generalmente utilizados.

Para ampliar las alternativas posibles, el estudio define una regla financiera que permite obtener nuevas modalidades de préstamos, combinando dos o más series de préstamos diferentes (por ejemplo, un préstamo cupón cero con un préstamo de cuotas constantes). La regla financiera definida cumple con la condición de que la TIR de las cuotas resultantes del préstamo combinado sea igual a la tasa de interés del préstamo.

Además, la regla para combinaciones de préstamos permite obtener nuevas fórmulas analíticas para definir nuevas modalidades de préstamos. Lo que supone una gran ventaja con respecto a la alternativa de emplear métodos numéricos para definir estructuras de préstamos *ad hoc*.

Esto abre una vía, a la comercialización en el futuro por las entidades financieras de nuevas modalidades de préstamos con diferentes calendarios de amortización, que se adapten mejor a las necesidades de los clientes. Lo que implicaría una mejora sustancial en la innovación financiera y en la personalización de préstamos de las entidades financieras.

Palabras clave: Préstamo, Estructuración Financiera, Fórmula Analítica, TIR, Regla Financiera, Combinaciones de préstamos, Personalización, Innovación Financiera.

RESUMEN EJECUTIVO

La forma en que se comercializan actualmente los préstamos ofrece generalmente unas condiciones estandarizadas, que no se adaptan en muchas ocasiones a las preferencias de los clientes de las entidades financieras, tanto en el caso de particulares como empresas.

Una de las razones de este escaso desarrollo tiene que ver también con el número reducido de opciones de préstamos y fórmulas analíticas desarrolladas a nivel teórico en las matemáticas financieras.

La introducción del préstamo con cuotas constantes supuso un avance respecto al préstamo de amortización lineal. El préstamo con cuotas crecientes aplicando la fórmula de una renta en progresión geométrica inmediata y pospagable, supone una mejora sobre el préstamo con cuotas constantes, pero sigue teniendo la limitación de que el crecimiento de las cuotas sigue una razón o tasa de crecimiento fija.

El objetivo de este estudio es definir una regla que permita obtener fórmulas analíticas de nuevas modalidades de préstamos, que permita a las entidades financieras personalizar sus préstamos según las necesidades de los clientes, teniendo en cuenta las restricciones del mercado financiero.

Lo complicado de definir una serie de cuotas de un préstamo, es realizarlo de modo que se cumplan las dos condiciones siguientes:

- Que la definición de la serie de cuotas del nuevo préstamo dé como resultado una TIR igual a la tasa de interés del préstamo.

- Que la expresión sea una fórmula analítica, que se puede emplear siempre, independientemente de los valores de los datos numéricos. O sea que no sea una serie construida *ad hoc* en base a un método numérico, como sería por ejemplo utilizar en Excel la función «Buscar Objetivo» para obtener un valor mediante el cálculo iterativo.

Este artículo presenta una regla financiera, que permite obtener nuevas modalidades de préstamos, en base a la combinación de diferentes tipos de préstamos y que cumple con las dos condiciones anteriores.

La metodología que se sigue en el estudio es presentar primero las fórmulas analíticas de los préstamos que actualmente más se emplean (como la fórmula del préstamo amortización lineal o el préstamo con cuotas constantes). Definir a continuación la regla financiera para la combinación de préstamos. Y por último, definir fórmulas analíticas de nuevas modalidades de préstamos en base a la combinación de diferentes tipos de préstamos.

Para encontrar la regla financiera para la combinación de préstamos, la metodología que se ha seguido es investigar en la búsqueda de formulación de ecuaciones para resolver problemas matemáticos, en vez de acudir a la solución más sencilla y cómoda de emplear el cálculo iterativo para encontrar soluciones *ad hoc,* que sirven para encontrar una solución a un determinado problema, pero que no son soluciones universales que se puedan aplicar a cualquier situación.

El valor fundamental de la regla financiera reside en su universalidad, en poder aplicarse a cualquier tipo de préstamo pospagable, de cualquier importe, duración, o tasa de interés.

La principal conclusión del estudio es que la regla financiera, puede suponer una mejora en la estructuración de préstamos y en la innovación financiera por parte de las entidades financieras.

La regla financiera definida es también una gran ventaja, sobre la práctica en el caso de financiaciones estructuradas, de introducir el calendario del repago de la deuda en el contrato de financiación. En vez de definir un calendario prefijado de devolución del préstamo, en el contrato del préstamo se puede introducir la fórmula analítica y si el préstamo está ligado a un tipo de interés variable, recalcular las cuotas cuando el tipo de interés varíe. Eso permite una gran flexibilidad ante cambios en las tasas de interés. De este modo, el contrato de financiación tiene una flexibilidad en el cálculo de las cuotas, que no tendría si en vez de una fórmula matemática se hubiese introducido un calendario prefijado del repago del principal de la deuda.

Además, es mucho más complicado adjuntar una hoja de cálculo a un contrato de financiación (y mucho más difícil de defender ante un juez), que introducir una fórmula analítica.

Por tanto, la regla financiera para obtener fórmulas analíticas de nuevas modalidades de préstamos no solo proporciona una mayor flexibilidad para préstamos referenciados a tipo de interés variable, sino también una mayor seguridad jurídica (que por ejemplo vinculando la devolución de un préstamo a los Ratios de Cobertura de la Deuda calculados en un modelo financiero).

El hecho de que existiese la fórmula matemática de la cuota constante, ayudo a impulsar el mercado de los préstamos hipotecarios. El hecho de que a partir de ahora se pueda obtener de manera sencilla fórmulas analíticas de nuevas modalidades de préstamos, permitirá a las entidades financieras disponer de las herramientas para comercializar en el futuro nuevos tipos de préstamos que estén mejor adaptados a las necesidades de sus clientes (por ejemplo, acomodando el esfuerzo financiero del pago del préstamo a lo largo de la vida del préstamo).

1. INTRODUCCIÓN

La definición de nuevas modalidades de préstamos con cuotas personalizadas que se adapten mejor a las necesidades de un proyecto o de un cliente de una entidad financiera es una demanda creciente en el mercado.

La estructuración financiera de préstamos con calendarios de repago *ad hoc* ha sido una característica generalmente reservada para los préstamos tipo *Project Finance,* en los que el esculpido de la devolución de la deuda se realizaba en función de los flujos de caja generados por el proyecto, empleando generalmente el Ratio de Cobertura del Servicio de la Deuda para determinar el calendario de la devolución del principal de la Deuda del Proyecto.

La definición de los calendarios de amortización de estos préstamos se caracteriza por obtenerse mediante métodos numéricos, en vez de mediante fórmulas analíticas.

En la industria financiera, los productos financieros como los préstamos personales o hipotecarios siguen de forma general unas normas fijas preestablecidas para la devolución del principal de la Deuda, como es el sistema de amortización lineal del préstamo o el sistema de cuotas constantes.

Aquellas entidades que sean capaces de innovar y adaptar su oferta a las necesidades diferentes de los clientes, estarán en mejores condiciones para competir en el mercado financiero.

El objetivo de este artículo es presentar una herramienta que sirva para el diseño de nuevas modalidades de préstamos, con el fin de que las entidades financieras puedan ofrecer a sus clientes préstamos personalizados que se adapten a las necesidades particulares de los diferentes clientes.

Estas herramientas de personalización de préstamos pueden utilizarse también en otros ámbitos como el Project Finance en sustitución del Ratio de Cobertura del Servicio de la Deuda, o los Préstamos Corporativos, que requieran préstamos adaptados a los flujos de caja del negocio.

La personalización es una de las claves del éxito del futuro, pero esa personalización requiere de innovación financiera, con el aporte de nuevas fórmulas que permitan adaptarse mejor a las necesidades de los clientes.

Numerosos autores han escrito y realizado importantes aportaciones sobre matemáticas financieras en España en los últimos 30 años como Avilés (2001), Baquero y Muñoz (2003), García (2002), Gil (1993), González Catalá (1993), González Velasco (2008), Nieto (1985), Pablo (2001), Pozo y Zúñiga (1994) o Ruiz (1990).

Este artículo trata de seguir profundizando en las matemáticas financieras aplicadas a las operaciones bancarias, y trata de seguir realizando nuevas aportaciones y aportando nuevas herramientas que permita seguir avanzando en el camino de la innovación en el campo de las matemáticas financieras y las operaciones bancarias.

El uso extensivo de paquetes informáticos, ha traído como consecuencia que muchas veces se haya dejado de lado la formulación analítica. Al igual que con la calculadora hemos perdido el hábito de saber multiplicar o dividir, con los paquetes informáticos se ha perdido muchas veces el hábito de calcular mediante fórmulas analíticas, pasando a utilizar por ejemplo la función más sencilla de PAGO(), sin entender la formulación que hay detrás de los comandos de Excel, o a emplear la función BUSCAR OBJETIVO() para hallar una solución mediante métodos numéricos, sin necesidad de definir una fórmula analítica.

Este artículo vuelve a poner en valor la importancia la generación de fórmulas analíticas para el cálculo de las operaciones financieras.

Para ello, se define una regla financiera que facilita la obtención de fórmulas analíticas para nuevas modalidades de préstamos con diferentes perfiles de cuotas o flujos de caja.

2. ESTRUCTURACIÓN DE PRÉSTAMOS

Para estructurar un préstamo mediante una serie de cuotas que incluyan el pago de intereses y la devolución del principal, no sirve cualquier serie de cuotas con importes diferentes. Estas cuotas han de cumplir la condición de que la TIR del préstamo coincida con la tasa de interés del préstamo.

Esto es, la definición de las cuotas del préstamo han de cumplir con la restricción de que la TIR de los flujos de caja del préstamo sea igual a la tasa de interés del préstamo.

Esto dificulta la estructuración de préstamos mediante cuotas variables, salvo que se utilicen programas informáticos, como por ejemplo utilizando en el Excel la función BUSCAR OBJETIVO(), en vez de empleando fórmulas analíticas.

Lo que realiza este estudio es definir una regla financiera para combinar diferentes tipos de préstamos con el fin de obtener fórmulas analíticas de nuevas modalidades de préstamos con perfiles de pagos diferentes, pero que cumplen con la condición de que la TIR del nuevo préstamo combinado sea igual a la tasa de interés del préstamo.

A continuación, analizaremos las fórmulas de los préstamos que actualmente más se utilizan, presentaremos la regla para combinaciones de préstamos, y por último mostraremos diferentes ejemplos de nuevas modalidades de préstamos obtenidos aplicando la regla anterior.

Mediante la combinación de diferentes tipos de préstamos, las entidades financieras pueden estructurar préstamos que se ajusten mejor a las necesidades de determinados clientes. Pueden además incluir las fórmulas analíticas de estos préstamos en los contratos de financiación, en vez de valores calculados previamente mediante un método numérico, lo que proporciona a las entidades financieras una flexibilidad y seguridad mucho mayor especialmente para contratos de préstamos que estén referenciados a un tipo de interés variable, y evitar así litigios con clientes.

3. MODALIDADES DE PRÉSTAMOS ACTUALES MÁS FRECUENTES

Las entidades financieras ofrecen diferentes modalidades de préstamos, que se diferencian en el calendario de amortización. Las principales modalidades de préstamos otorgados por entidades financieras y de bonos emitidos en los mercados de capitales, se indican a continuación.

a) Préstamos o bonos cupón cero

En esta modalidad de préstamos no se pagan intereses durante toda la vida del préstamo y la devolución del principal y el pago de intereses se produce al final del préstamo. En este tipo de préstamos hay una única cuota al final del préstamo. La fórmula del préstamo es la siguiente:

$$(1)\quad a_n = C_{k=n} \cdot (1+i)^n$$

Donde,

a_n = cuota en el período n

$C_{k=n}$ = devolución del principal en el período n

i = tasa de interés del préstamo

n = número de períodos

b) Préstamo americano o con cupones constantes

En el préstamo americano solo se pagan intereses durante la vida del préstamo y se devuelve todo el principal del préstamo en la última cuota. Equivale a los bonos que pagan cupones constantes y devuelven el principal al vencimiento. La fórmula con pago de intereses al vencimiento es:

$$(2)\quad a_k = C \cdot i + C_{k=n}$$

Donde,

a_k = cuota en el período k

C = capital del préstamo

i = tasa de interés del préstamo

n = número de períodos

$C_{k=n}$ = devolución del principal en el período n

c) Préstamo alemán o con amortización lineal

En el préstamo alemán o con amortización lineal las cuotas de amortización del principal son constantes, y los intereses del préstamo son decrecientes al calcularse sobre un saldo del principal que disminuye siempre en una suma fija.

La fórmula del préstamo con amortización lineal con intereses pagados al vencimiento es la siguiente:

$$(3)\quad a_k = \frac{C}{n} + i \cdot \frac{C \cdot (n - k + 1)}{n}$$

Donde,

a_k = cuota en el período k

C = capital del préstamo

i = tasa de interés del préstamo

n = número de períodos

k = período de la cuota entre 1 y n

El primer término de la fórmula corresponde con la amortización del principal y el segundo término con el importe correspondiente al pago de intereses.

d) Préstamo francés o con cuotas constantes

La fórmula del préstamo francés o cuota constante es la más empleada en el caso de los préstamos hipotecarios, y en otros tipos de préstamos como los préstamos al consumo.

Se caracteriza porque es la cuota es constante, siendo la amortización del préstamo creciente y el pago de intereses decreciente.

La fórmula del préstamo con cuotas constantes, con pago de intereses al vencimiento es la siguiente:

$$\textbf{(4)} \quad a = \frac{C \cdot i}{1 - (1+i)^{-n}}$$

Donde,

a = cuota constante

C = capital del préstamo

i = tasa de interés del préstamo en el período

n = número de períodos

Como se puede observar en la fórmula anterior, para el caso particular de que la tasa de interés sea 0%, la fórmula da error porque el denominador sería cero. La fórmula de la cuota constante de un préstamo con un tipo de interés cero, es tan sencillo como dividir el capital del préstamo entre el número de períodos (C/n). Esta situación que podría considerarse hipotética se da en la actualidad en muchos préstamos hipotecarios otorgados antes de la crisis, en que la tasa de Euribor negativa anula el diferencial del préstamo con respecto al Euribor.

e) Préstamos en progresión geométrica con tasas de crecimiento constantes

Mediante la fórmula de la renta en progresión geométrica inmediata y pospagable, se puede definir un préstamo con cuotas crecientes, siendo la tasa de variación de las cuotas una razón fija. Esta fórmula cumple con el requisito de que la TIR es igual a la tasa de interés del préstamo. La fórmula de un préstamo en progresión geométrica con intereses al vencimiento, es la siguiente:

$$\textbf{(5)} \quad a_k = \frac{C \cdot (i-g)}{1 - (\frac{1+g}{1+i})^n} \cdot (1+g)^{(k-1)}$$

Donde,

a_k = cuota en el período k

C = capital del préstamo

i = tasa de interés

g = tasa de crecimiento de la cuota

n = número de períodos

k = período de la cuota entre 1 y n

El primer término de la fórmula corresponde con el cálculo de la primera cuota a1, y el segundo término se emplea para el cálculo de las siguientes cuotas (siendo en a1 el valor del segundo término igual a 1).

El préstamo de cuotas en progresión geométrica puede tener tasas de crecimiento negativas, con lo que las cuotas en ese caso serían decrecientes, en vez de crecientes. Uno de los inconvenientes de la fórmula de la renta en progresión geométrica inmediata y pospagable, es que el valor de la tasa de interés y de la tasa de crecimiento de la cuota han de ser diferentes. Cuando ambos valores son iguales, por ejemplo un 2% de tasa de interés y un 2% de tasa de crecimiento de la cuota, la fórmula da error porque tanto el numerador como el denominador son cero. Para ese caso concreto, deberíamos usar la fórmula definida en el apartado siguiente.

f) Préstamos con cuotas con tasas de crecimiento constantes iguales a la tasa de interés

Si multiplicamos el principal del préstamo entre el número de períodos, por uno más la tasa de interés elevado al número de períodos, obtenemos una serie de cuotas crecientes que crecen a la tasa de interés del préstamo, y que cumplen con el requisito de que la TIR de las cuotas es igual a la tasa de interés del préstamo. La fórmula de préstamo con tasas de crecimientos constantes iguales a la tasa de interés es la siguiente:

$$\textbf{(6)}\ a_k = \frac{C}{n} \cdot (1+i)^k$$

Donde,

a_k = cuota del préstamo en el período k

C = capital del préstamo

n = número de períodos

i = tasa de interés del préstamo en el período

k = período de la cuota entre 1 y n

g) Cuadro de amortización de un préstamo

La Cuota de un préstamo consta de dos partes, siendo una parte la devolución del principal del préstamo, y la otra parte el pago de los intereses del préstamo. Siendo ak la cuota del préstamo, pk el principal del préstamo amortizado en el período, y rk los intereses del período, se cumple que:

$$\textbf{(7)}\ a_k = p_k + r_k$$

Donde,

a_k = cuota del préstamo en el período k

p_k = amortización del préstamo en el período k

r_k = intereses del préstamo en el período k

La parte de intereses de la cuota del préstamo, en cualquier préstamo se corresponde con el importe del capital pendiente de amortizar por la tasa de interés. Los intereses del préstamo generados en el período k se muestran en la siguiente fórmula:

$$\textbf{(8)}\ r_k = C_{k-1} \cdot i$$

Donde,

r_k = intereses del préstamo en el período k

C_{k-1} = principal del préstamo al final del período k-1

i = tasa de interés del préstamo

La parte de amortización (o devolución del principal) del préstamo pk a partir de las fórmulas (7) y (8), sería el importe de la cuota ak menos el importe de los intereses rk. Esto es, la amortización del préstamo es igual a la cuota del préstamo de ese período menos los intereses del período.

$$\textbf{(9)}\ p_k = a_k - C_{k-1} \cdot i$$

Donde,

p_k = amortización del préstamo en el período k

a_k = cuota del préstamo en el período k

C_{k-1} = principal del préstamo al final del período k-1

i = tasa de interés del préstamo

4. REGLA FINANCIERA PARA COMBINACIONES DE PRÉSTAMOS

Enunciado de la regla financiera para combinaciones de préstamos

Una forma de conseguir nuevas modalidades de préstamos es combinar características de diversos préstamos, con el fin de obtener préstamos con características nuevas que puedan además definirse a través de ecuaciones o fórmulas analíticas, y no mediante el empleo de métodos numéricos.

Para obtener nuevas tipologías de préstamos, se pueden combinar diferentes tipos de préstamos en base a la siguiente regla financiera para combinaciones de préstamos, definida por el autor del estudio:

REGLA FINANCIERA PARA COMBINACIONES DE PRÉSTAMOS

Si tenemos dos o más series de cuotas de préstamos pospagables –en base al mismo principal del préstamo, y tasa de interés– podemos agregar las anteriores series de cuotas y obtener una nueva serie de cuotas en que la TIR del préstamo sea igual a la tasa de interés, siempre que el desembolso del principal del préstamo de las series sea en el mismo período y los factores de ponderación de las diferentes series de cuotas sean positivos y la suma de todos ellos sea igual a 1. Independientemente de que las series tengan un diferente plazo o número de cuotas.

En base a esta regla financiera podemos combinar diferentes modalidades de préstamos para obtener nuevos tipos de préstamos. Las posibles combinaciones de préstamos son prácticamente infinitas. Siguiendo la regla definida anteriormente, se seguirá cumpliendo que la TIR de las Cuotas es igual a la tasa de interés del préstamo. La capacidad de innovación financiera en estructuración de préstamos aplicando la anterior regla financiera es enorme.

El enunciado en inglés de la regla financiera, sería el siguiente:

REGLA FINANCIERA PARA COMBINACIONES DE PRÉSTAMOS
FINANCIAL RULE OF LOAN COMBINATIONS

If we have two or more series of post payable loan installments –based on the same principal of the loan, and interest rate– we can addthe previous series of installments and obtain a new series of installments in which the IRR of the loan equals the interest rate, provided that the disbursement of the loan principal of the series is in the same period and the weights of the different series of loan installments are positive and the sum of all of them is equal to 1.Regardless of whether the series have a different term or number of installments.

Demostración de la regla financiera para combinaciones de préstamos

La regla financiera para combinaciones de préstamos, tiene cinco condiciones:

- Que los préstamos sean pospagables.
- Que los préstamos tengan la misma tasa de interés.
- Que el desembolso del principal del préstamo sea en el mismo período.
- Que los préstamos tengan el mismo principal.
- Que los pesos o ponderaciones de las diferentes series de cuotas sean positivos y su suma igual a 1.

Las condiciones de que los préstamos sean pospagables y tengan la misma tasa de interés para poder ser combinados, es en realidad un requisito para que ambos préstamos tengan la misma TIR.

Los préstamos pospagables y con la misma tasa de interés cumplen con la siguiente de las propiedades de la TIR, que se resume en el siguiente enunciado:

La suma o resta total o parcial de dos o más series de flujos de caja que tengan la misma TIR, producirá una nueva serie de flujos de caja que tendrá una solución con la misma TIR.

Dos series diferentes de préstamos prepagables con la misma tasa de interés pueden tener diferentes TIR, por lo que series diferentes de préstamos prepagables con la misma tasa de interés no cumplen necesariamente con la anterior condición.

En la siguiente Tabla 1 mostramos un ejemplo de dos series de flujos de caja, que tienen la misma TIR y sobre las que realizamos las siguientes operaciones:

- Sumamos ambas series que comienzan en el mismo período 0, y el resultado de la nueva serie proporciona la misma TIR de las dos series anteriores.

- Sumamos ambas series, pero ambas comienzan en períodos diferentes, y el resultado de la nueva serie proporciona la misma TIR de las dos series anteriores.

- La Serie 1 la multiplicamos por -0,25 y la Serie la multiplicamos por 1,5, y las sumamos y el resultado de la nueva serie proporciona la misma TIR de las dos series anteriores.

TABLA 1. COMBINACIONES DE SERIES DIFERENTES DE FLUJOS DE CAJA CON MISMA TIR

Variables	TIR	0	1	2	3	4	5	6
Serie 1 comienzo en 0	4,00%	-1.000,00	250,00	300,00	350,00	200,16		
Serie 2 comienzo en 0	4,00%	-4.000,00	350,00	550,00	750,00	950,00	2.039,29	
Suma Series 1 y 2	**4,00%**	**-5.000,00**	**600,00**	**850,00**	**1.100,00**	**1.150,16**	**2.039,29**	
Serie 1 comienzo en 0	4,00%	-1.000,00	250,00	300,00	350,00	200,16		
Serie 2 comienzo en 1	4,00%		-4.000,00	350,00	550,00	750,00	950,00	2.039,29
Suma Series 1 y 2	**4,00%**	**-1.000,00**	**-3.750,00**	**650,00**	**900,00**	**950,16**	**950,00**	**2.039,29**
-0,25 x Serie 1 en 0	4,00%	250,00	-62,50	-75,00	-87,50	-50,04		
1,50 Serie 2 en 1	4,00%		-6.000,00	525,00	825,00	1.125,00	1.425,00	3.058,93
Suma Series 1 y 2	**4,00%**	**250,00**	**-6.062,50**	**450,00**	**737,50**	**1.074,96**	**1.425,00**	**3.058,93**

Como vemos en la Tabla 1, para obtener una misma TIR es indiferente que las dos series comiencen en el mismo período o en diferentes períodos, o que sumemos o restemos ambas series, o que los coeficientes de ponderación de las diferentes series no sean positivos o no sume 1.

Se indica que la suma combinada tendrá una solución con la misma TIR, porque en las series donde haya más de una sucesión de números negativos y positivos puede existir más de una solución, o que en algunos casos iterativamente no se encuentre una solución.

Como la TIR de un préstamo pospagable coincide con su tipo de interés (no tomando en consideración el pago de posibles comisiones o el aporte de garantías como saldos en cuenta que eleven el coste financiero del préstamo efectivamente dispuesto) la condición que dos series de cuotas tengan la misma TIR se cumple siempre que los dos préstamos pospagables tengan la misma tasa de interés.

Las otras tres condiciones que se han puesto, de que los préstamos tengan el mismo principal, el desembolso de los préstamos sea en el mismo periodo, o que las ponderaciones de las diferentes series de cuotas sean positivas y su suma sea igual a 1, no son requisitos para conseguir una misma TIR sino que las razones de estos requisitos son las siguientes:

- Los préstamos han de tener el mismo principal, para que las cuotas de las diferentes series estén referenciadas al mismo principal. Si los prestamos tuviesen diferentes principales, habría que homogeneizar las cuotas para que estuviesen referenciadas a un mismo principal, o bien sumar de forma ponderada los principales de las diferentes series de cuotas. El poner la condición de un mismo principal, simplifica la agregación de las cuotas y la combinación de fórmulas analíticas de diferentes tipos de préstamos.

- Los préstamos se han de referir al mismo período, para no mezclar en un período el principal de un préstamo con cuotas de otros préstamos, y evitar de este modo que existan series en que se alternen flujos con signo negativo y positivo, y pueda existir más de una solución de la TIR.

- La suma de los diferentes factores de ponderación de las series ha de ser igual a 1, para que el préstamo combinado esté referenciado al mismo principal que las series de cuotas. Los factores de ponderación han de ser a la vez positivos y sumar 1, porque cuando el factor de ponderación de una serie de cuotas adopta valores positivos por encima de la unidad o valores negativos (lo que equivale a restar la serie), se pueden suceder cuotas positivas y negativas y aunque se sigue cumpliendo generalmente la condición de que exista una solución de la TIR que sea igual a la tasa de interés del préstamo, los flujos obtenidos pueden no tener sentido desde el punto de vista de un préstamo.

En definitiva, la condición de que los préstamos estén referenciados al mismo principal es para evitar tener que homogeneizar las series de cuotas a un mismo principal o sumar de forma ponderada los diferentes principales. Y las otras dos condiciones de que los desembolsos de los principales de los préstamos estén referenciados al mismo período, y los factores de ponderación de las series de cuotas sean positivos y su suma sea igual a 1 son para evitar que se puedan suceder series con signos positivos y negativos y pueda existir más de una solución de la TIR.

La utilidad de la Regla financiera de combinación de préstamos es que es una herramienta útil y sencilla de emplear para conseguir fórmulas analíticas correspondientes a nuevas modalidades de préstamos.

De este modo, se pueden conseguir préstamos personalizados con diferentes estructuras de amortización, con un perfil de flujos de caja que se adapté mejor a las necesidades de los clientes o prestatarios.

Además, como veremos, las nuevas series de cuotas obtenidas en base a combinaciones de series, tienen propiedades diferentes a las propiedades que tienen las series de origen. Con lo que no solo se pueden combinar características de préstamos, sino que se obtienen préstamos con características nuevas. Como por ejemplo, que las tasas de crecimiento de las cuotas no sean constantes sino sean variables aumentando (o disminuyendo) con el tiempo.

En el caso de que se combinen dos préstamos con diferentes vencimientos, la fórmula del préstamo combinado tendría dos períodos diferentes («n1» y «n2») en vez de un solo periodo «n».

5. EJEMPLOS DE PRÉSTAMOS COMBINADOS

Anteriormente se han descrito las siguientes tipologías de préstamos, y se han definido las fórmulas analíticas para el cálculo de las cuotas:

- Préstamos cupón cero (1)

- Préstamo con cupones constantes con amortización al final del período (2)

- Préstamo con amortización lineal con intereses pagados al vencimiento (3).

- Préstamo con cuotas constantes (4)

- Préstamos con cuotas con tasas de crecimiento constantes que siguen una renta en progresión geométrica inmediata y pospagable (5).

- Préstamo con cuotas con tasas de crecimiento iguales a la tasa de interés del préstamo (6).

También se ha determinado previamente como a partir de la cuota de un préstamo se puede construir el cuadro de amortización del préstamo y la parte de la cuota correspondiente al pago de intereses. Por tanto, el aspecto más relevante para la definición de un préstamo es la determinación del importe de la cuota del préstamo.

Es decir, teniendo el importe de la cuota del préstamo se puede construir un cuadro de amortización del préstamo deduciendo previamente de la cuota los intereses del período. Aunque en el caso de los préstamos que incluyan cupones cero el procedimiento puede ser más complicado.

Respecto al Cuadro de Amortización de un préstamo combinado, señalar que como en un préstamo cupón cero no se pagan intereses hasta el final del período, puede ocurrir que al construir la tabla de amortización de un préstamo combinado, los intereses generados en el período sean superiores al pago del préstamo en el período. En ese caso en el Cuadro de Amortización, los intereses del periodo sería la totalidad de la cuota del período, y la parte de amortización del préstamo sería cero. Los intereses generados no pagados en el periodo serían pagados en cuotas posteriores.

En base a los cinco primeros tipos de préstamos definidos previamente, podemos realizar 10 combinaciones de préstamos tomados de dos en dos. Solamente incluimos al final un ejemplo del Préstamo con cuotas con tasas de crecimiento iguales a la tasa de interés del préstamo (6), ya que el perfil de pagos de este préstamo es muy similar al del Préstamo con cuotas en progresión geométrica (5).

En este capítulo, nos limitamos a combinaciones de dos tipos de préstamos, pero se pueden combinar tantos tipos de préstamos como se quiera (tres, cuatro, cinco,…) siempre que se siga la regla financiera definida anteriormente, y seguirá cumpliéndose que la TIR de las Cuotas es igual a la tasa de interés del préstamo. Las combinaciones de préstamos incluidas en este capítulo son un ejemplo de las oportunidades que permite la regla financiera de combinaciones de préstamos.

En los ejemplos que se muestran a continuación, todos los préstamos combinados son pospagables y con el mismo período de vencimiento. Aunque es posible también combinar préstamos con diferentes vencimientos (en ese caso, habría dos períodos diferentes en vez de un solo periodo n).

En los ejemplos incluidos el valor de la tasa de ponderación «w» del primer tipo de préstamo está situado siempre entre 0% y 100%. Los valores de «w» por encima de 100% o por debajo de 0% constituye en realidad restar un tipo de préstamo al otro tipo de préstamo. Los resultados obtenidos seguirán proporcionando una TIR igual a la tasa de interés del préstamo, pero pueden sucederse cuotas positivas y negativas lo que no tiene sentido desde el punto de vista de un préstamo.

En la siguiente Tabla 2 se definen los inputs comunes a los diferentes préstamos:

TABLA 2. INPUTS PRÉSTAMOS

Variables	TIR
Importe Préstamo “C”	1.000
Plazo (periodos) “n”	7
Tasa de interés “i”	4,00%
Tasa de crecimiento “g” (progresión geométrica)	2,00%
Tasa de Ponderación “w”	50,00%

A continuación, explicamos algunas de las características de estos préstamos combinados:

a) Préstamo cupón cero con préstamo con cupones constantes

Con la combinación de un préstamo cupón cero con un préstamo con cupones constantes conseguimos un préstamo combinado donde hay cupones en cada período y una cuota final que incluye la devolución del principal del préstamo y el pago de intereses atrasados del préstamo.

La fórmula aplicable de este préstamo sería:

$$\textbf{(10)}\ a_k = C_{k=n} \cdot (1+i)^n \cdot w + (C \cdot i + C_{k=n}) \cdot (1-w)$$

Los términos de dicha fórmula han sido previamente definidos en las ecuaciones (1)y (2). El único nuevo término de esta ecuación es:

w = factor de ponderación del primer término del préstamo

Los resultados aplicando los inputs de la Tabla 2 y la fórmula (10), se muestran en la Tabla 3:

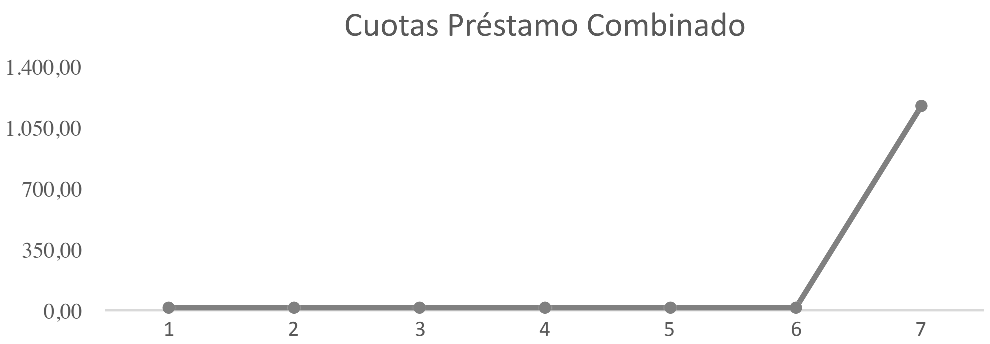
TABLA 3. PRÉSTAMO CUPÓN CERO CON PRÉSTAMO CUPONES CONSTANTES

Variables	TIR	0	1	2	3	4	5	6	7
Cupón Cero	4,00%	-1.000,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1.315,93
Cupones Constantes	4,00%	-1.000,00	40,00	40,00	40,00	40,00	40,00	40,00	1.040,00
Préstamo Combinado	4,00%	-1.000,00	20,00	20,00	20,00	20,00	20,00	20,00	1.177,97
Crecimiento Cuota	965%			0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	5789,83%

Como se puede observar en la Tabla 3 en el nuevo préstamo combinado el pago de la última cuota es menor que en el préstamo cupón cero a cambio de pagar unos cupones a lo largo del préstamo que son inferiores a los intereses generados en el período. Este tipo de préstamos puede ser útil cuando se busca un perfil de flujos de caja parecido al de un préstamo cupón cero, pero en que una parte de los intereses sean pagados durante la vida del préstamo.

El perfil de los flujos de caja de las cuotas del préstamo combinado se muestra en la Figura 1:

FIGURA 1. PRÉSTAMO CUPÓN CERO CON PRÉSTAMO CUPONES CONSTANTES



En la Tabla 4 se indican los valores obtenidos con diferentes valores del factor ponderación «w».

TABLA 4. PRÉSTAMO CUPÓN CERO CON PRÉSTAMO CUPONES CONSTANTES. EVOLUCIÓN DE LAS CUOTAS SEGÚN VALOR DEL FACTOR DE PONDERACIÓN

Valor de "w"	Cuotas
=100%	Préstamo Cupón Cero
>50%-<100%	Predomina el Préstamo Cupón Cero. Cupones pequeños durante el periodo y la mayor parte del pago del préstamo e intereses corresponde a la última Cuota
=50%	Pondera por igual el Préstamo Cupón Cero y el Préstamo Cupones Constantes
>0%-<50%	Predomina el Préstamo Cupones Constantes. En la última cuota se devuelve la totalidad del préstamo y parte de los intereses generados en periodos anteriores
=0%	Préstamo Cupones Constantes

b) Préstamo cupón cero con préstamo con cuotas constantes

Con la combinación de un préstamo cupón cero con un préstamo con cuotas constantes conseguimos un préstamo combinado que sería un préstamo con cuotas constantes en cada período y una cuota final que incluye un «bullet» una parte mayor del principal del préstamo y puede en su caso incluir pago de intereses atrasados del préstamo.

La fórmula aplicable de este préstamo sería:

$$\textbf{(11)}\ a_k = C_{k=n} \cdot (1+i)^n \cdot w + \frac{C \cdot i}{1-(1+i)^{-n}} \cdot (1-w)$$

Los términos de dicha fórmula han sido previamente definidos en las ecuaciones (1) y (4).

Los resultados aplicando los inputs de la Tabla 2 y la fórmula (11), se muestran en la Tabla 5:

TABLA 5. PRÉSTAMO CUPÓN CERO CON PRÉSTAMO CUOTAS CONSTANTES

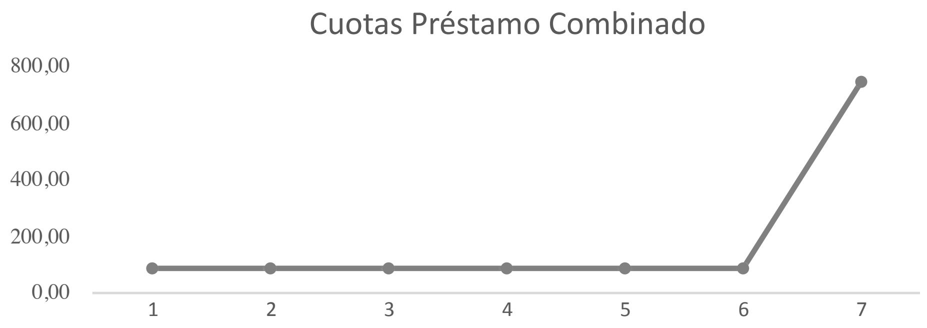
Variables	TIR	0	1	2	3	4	5	6	7
Cupón Cero	4,00%	-1.000,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1.315,93
Cuotas Constantes	4,00%	-1.000,00	166,61	166,61	166,61	166,61	166,61	166,61	166,61
Préstamo Combinado	4,00%	-1.000,00	83,30	83,30	83,30	83,30	83,30	83,30	741,27
Crecimiento Cuota	132%			0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	789,83%

Como se puede observar en la Tabla 5 en el nuevo préstamo combinado se pagar una serie de cuotas a lo largo del préstamo que son constantes, y una última cuota que además de los intereses incluye un «bullet» del principal del préstamo.

Este tipo de préstamo puede ser útil, cuando se busca un préstamo con una cuota constante pero en el que una parte importante del préstamo se repague en la última cuota del préstamo (por ejemplo, porque se prevea que el préstamo se refinanciará a vencimiento del préstamo). El perfil de pagos de este tipo de préstamos también se puede conseguir combinado un préstamo con cupones constantes con un préstamo con cuotas constantes.

El perfil de los flujos de caja de las cuotas del préstamo combinado se muestra en la Figura 2:

FIGURA 2. PRÉSTAMO CUPÓN CERO CON PRÉSTAMO CUOTAS CONSTANTES



En la Tabla 6 se indican los valores obtenidos con diferentes valores factor de ponderación «w».

TABLA 6. PRÉSTAMO CUPÓN CERO CON PRÉSTAMO CUOTAS CONSTANTES EVOLUCIÓN DE LAS CUOTAS SEGÚN VALOR DEL FACTOR DE PONDERACIÓN

Valor de "w"	Cuotas
=100%	Préstamo Cupón Cero
>50%-<100%	Predomina el Préstamo Cupón Cero. Cuotas pequeñas constantes y en la última cuota hay un importante pago correspondiente al Bullet
=50%	Pondera por igual el Préstamo Cupón Cero y el Préstamo Cuotas Constantes
>0%-<50%	Predomina el Préstamo Cuotas Constantes. En la última cuota hay un bullet debido al Préstamo Cupón Cero
=0%	Préstamo Cuotas Constantes

c) Préstamo cupones constantes con préstamo con amortización lineal

Con la combinación de un préstamo con cupones constantes con un préstamo con amortización lineal conseguimos un préstamo combinado que sería un préstamo con cuotas decrecientes y una cuota final con un «bullet» que incluye una amortización mayor del préstamo.

La fórmula aplicable de este préstamo sería:

$$\mathbf{(12)}\ a_k = (C \cdot i + C_{k=n}) \cdot w + \left(\frac{C}{n} + i \cdot \frac{C \cdot (n-k+1)}{n}\right) \cdot (1-w)$$

Los términos de dicha fórmula han sido previamente definidos en las ecuaciones (2) y (3).

Los resultados aplicando los inputs de la Tabla 2 y la fórmula (12), se muestran en la Tabla 7:

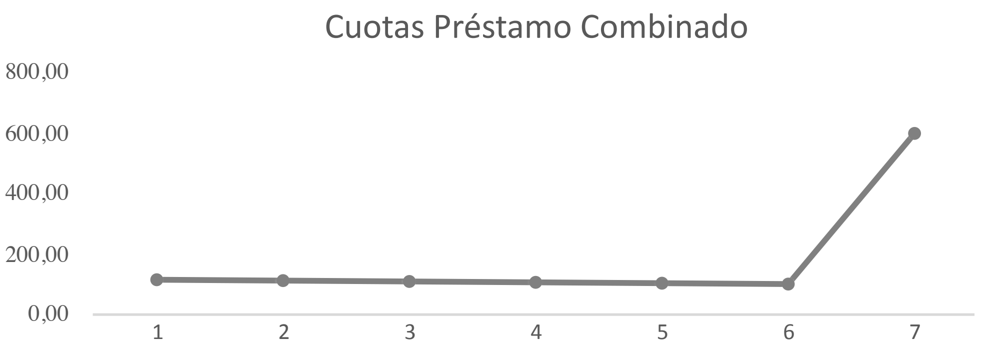
TABLA 7. PRÉSTAMO CUPONES CONSTANTES CON PRÉSTAMO AMORTIZACIÓN LINEAL

Variables	TIR	0	1	2	3	4	5	6	7
Cupones Constantes	4,00%	-1.000,00	40,00	40,00	40,00	40,00	40,00	40,00	1.040,00
Amortización Lineal	4,00%	-1.000,00	182,86	177,14	171,43	165,71	160,00	154,29	148,57
Préstamo Combinado	4,00%	-1.000,00	111,43	108,57	105,71	102,86	100,00	97,14	594,29
Crecimiento Cuota	83,0%			-2,56%	-2,63%	-2,70%	-2,78%	-2,86%	511,76%

Como se puede observar en la Tabla 7 en el nuevo préstamo combinado las cuotas son decrecientes a lo largo del préstamo (el efecto de las cuotas decrecientes es producido porque en el préstamo amortización lineal el principal del préstamo es decreciente) y se paga al final una última cuota que incluye un «bullet» del principal del préstamo.

El perfil de los flujos de caja de las cuotas del préstamo combinado se muestra en la Figura 3:

FIGURA 3. PRÉSTAMO CUPONES CONSTANTES CON PRÉSTAMO AMORTIZACIÓN LINEAL



En la Tabla 8 se indican los valores obtenidos con diferentes valores factor de ponderación “w”.

TABLA 8. PRÉSTAMO CUPONES CONSTANTES CON PRÉSTAMO AMORTIZACIÓN LINEAL EVOLUCIÓN DE LAS CUOTAS SEGÚN VALOR DEL FACTOR DE PONDERACIÓN

Valor de “w”	Cuotas
=100%	Préstamo Cupones Constantes
>50%-<100%	Predomina el Préstamo Cupones Constantes. Cuotas pequeñas decrecientes y en la última cuota hay un importante pago correspondiente al Bullet
=50%	Pondera por igual el Préstamo Cupones Constantes y el Préstamo Amortización Lineal
>0%-<50%	Predomina el Préstamo Amortización Lineal. Cuotas grandes decrecientes y en la última cuota hay un bullet debido al Préstamo Cupones Constantes
=0%	Préstamo Amortización Lineal

d) Préstamo cupones constantes con préstamo con cuotas en progresión geométrica

Con la combinación de un préstamo con cupones constantes con un préstamo con cuotas en progresión geométrica conseguimos un préstamo combinado que sería un préstamo con cuotas crecientes (en el caso más habitual de cuando g es positivo, o decrecientes si g es negativo) y una cuota final con un «bullet» que incluye una amortización mayor del préstamo.

La fórmula aplicable de este préstamo sería:

$$(\mathbf{13})\ a_k = (C \cdot i + C_{k=n}) \cdot w + \frac{C \cdot (i-g)}{1-(\frac{1+g}{1+i})^n} \cdot (1+g)^{(k-1)} \cdot (1-w)$$

Los términos de dicha fórmula han sido previamente definidos en las ecuaciones (2) y (5).

Los resultados aplicando los inputs de la Tabla 2 y la fórmula (13), se muestran en la Tabla 9:

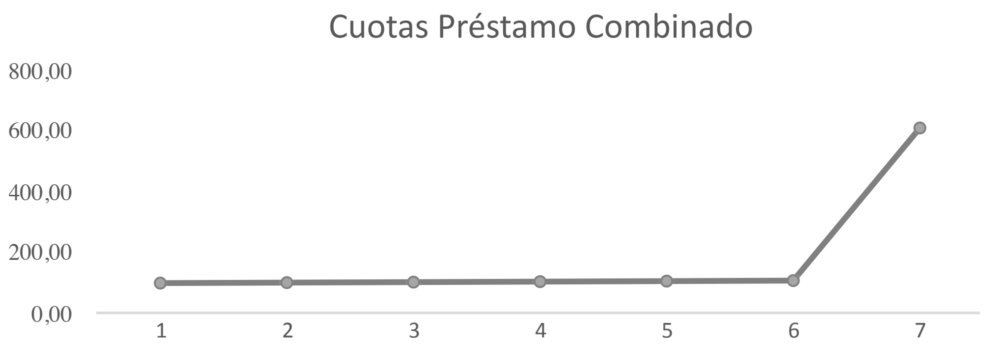
TABLA 9. PRÉSTAMO CUPONES CONSTANTES CON PRÉSTAMO CUOTAS EN PROGRESIÓN GEOMÉTRICA

Variables	TIR	0	1	2	3	4	5	6	7
Cupones Constantes	4,00%	-1.000,00	40,00	40,00	40,00	40,00	40,00	40,00	1.040,00
C. Progresión Geom.	4,00%	-1.000,00	157,36	160,51	163,72	167,00	170,34	173,74	177,22
Préstamo Combinado	4,00%	-1.000,00	98,68	100,26	101,86	103,50	105,17	106,87	608,61
Crecimiento Cuota	79,6%			1,59%	1,60%	1,61%	1,61%	1,62%	469,48%

Como se puede observar en la Tabla 9 en el nuevo préstamo combinado las cuotas son crecientes y hay una última cuota que además de los intereses incluye un «bullet» del principal del préstamo.

El perfil de los flujos de caja de las cuotas del préstamo combinado se muestra en la Figura 4.

FIGURA 4. PRÉSTAMO CUPONES CONSTANTES CON PRÉSTAMO CUOTAS EN PROGRESIÓN GEOMÉTRICA



En la Tabla 10 se indican los valores obtenidos con diferentes valores factor de ponderación «w».

TABLA 10. PRÉSTAMO CUPONES CONSTANTES CON PRÉSTAMO CUOTAS EN PROGRESIÓN GEOMÉTRICA. EVOLUCIÓN DE LAS CUOTAS SEGÚN VALOR DEL FACTOR DE PONDERACIÓN

Valor de "w"	Cuotas
=100%	Préstamo Cupones Constantes
>50%-<100%	Predomina el Préstamo Cupones Constantes. Cuotas crecientes con una pendiente de crecimiento más suave y un bullet más grande cuanto mayor es w
=50%	Pondera por igual el Préstamo Cupones Constantes y el Préstamo Cuotas en Progresión Geométrica
>0%-<50%	Predomina el Préstamo Cuotas en Progresión Geométrica. Cuotas crecientes con una pendiente más pronunciada y un bullet más pequeño cuanto más pequeño es w
=0%	Préstamo Cuotas en Progresión Geométrica

e) Préstamo amortización lineal con préstamo con cuotas constantes

Con la combinación de un préstamo con amortización lineal con un préstamo con cuotas constantes conseguimos un préstamo combinado que sería un préstamo con cuotas decrecientes, pero con una pendiente más suavizada que en el préstamo amortización lineal.

La fórmula aplicable de este préstamo sería:

$$\textbf{(14)}\ a_k = \left(\frac{C}{n} + i \cdot \frac{C \cdot (n-k+1)}{n}\right) \cdot w + \frac{C \cdot i}{1-(1+i)^{-n}} \cdot (1-w)$$

Los términos de dicha fórmula han sido previamente definidos en las ecuaciones (3) y (4).

Los resultados aplicando los inputs de la Tabla 2 y la fórmula (14), se muestran en la Tabla 11:

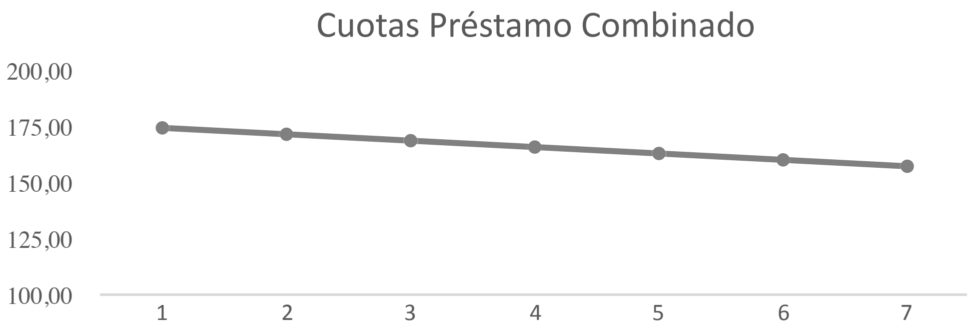
TABLA 11. PRÉSTAMO AMORTIZACIÓN LINEAL CON PRÉSTAMO CUOTAS CONSTANTES

Variables	TIR	0	1	2	3	4	5	6	7
Amortización Lineal	4,00%	-1.000,00	182,86	177,14	171,43	165,71	160,00	154,29	148,57
Cuotas Constantes	4,00%	-1.000,00	166,61	166,61	166,61	166,61	166,61	166,61	166,61
Préstamo Combinado	4,00%	-1.000,00	174,73	171,88	169,02	166,16	163,30	160,45	157,59
Crecimiento Cuota	-1,71%			-1,64%	-1,66%	-1,69%	-1,72%	-1,75%	-1,78%

Como se puede observar en la Tabla 11 en el nuevo préstamo combinado las cuotas son decrecientes por el efecto del préstamo amortización lineal, pero la pendiente de disminución de las cuotas es menor que en el préstamo amortización lineal. Las tasas de decrecimiento de las cuotas son crecientemente negativas.

El perfil de los flujos de caja de las cuotas del préstamo combinado se muestra en la Figura 5:

FIGURA 5. PRÉSTAMO AMORTIZACIÓN LINEAL CON PRÉSTAMO CUOTAS CONSTANTES



En la Tabla 12 se indican los valores obtenidos con diferentes valores factor de ponderación "w".

TABLA 12. PRÉSTAMO AMORTIZACIÓN LINEAL CON PRÉSTAMO CUOTAS CONSTANTES EVOLUCIÓN DE LAS CUOTAS SEGÚN VALOR DEL FACTOR DE PONDERACIÓN

Valor de "w"	Cuotas
=100%	Préstamo Amortización Lineal
>50%-<100%	Predomina el Préstamo Amortización Lineal. Cuotas decrecientes con una pendiente más pronunciada cuanto mayor es w
=50%	Pondera por igual el Préstamo Cupones Constantes y el Préstamo Cuotas Crecientes Tasa de Interés
>0%-<50%	Predomina el Préstamo Cuotas Constantes. Cuotas decrecientes con una pendiente más suave cuanto más pequeño es w
=0%	Préstamo Cuotas Constantes

f) Préstamo cuotas constantes con préstamo con cuotas en progresión geométrica

Con la combinación de un préstamo con cuotas constantes con un préstamo con cuotas en progresión geométrica conseguimos un préstamo combinado que sería un préstamo con cuotas crecientes, aunque con una pendiente más suave que en el caso del préstamo en progresión geométrica.

Sin embargo, las tasas de crecimiento de las cuotas no son constantes con una razón fija sino que las tasas de crecimiento de las cuotas son variables y crecientes. Como se observa, el préstamo combinado tiene características nuevas que no tienen los préstamos subyacentes con los que se ha compuesto el préstamo combinado.

La fórmula aplicable de este préstamo sería:

$$\textbf{(15)}\ a_k = \frac{C \cdot i}{1-(1+i)^{-n}} \cdot w + \frac{C \cdot (i-g)}{1-(\frac{1+g}{1+i})^n} \cdot (1+g)^{(k-1)} \cdot (1-w)$$

Los términos de dicha fórmula han sido previamente definidos en las ecuaciones (4) y (5).

Los resultados aplicando los inputs de la Tabla 2 y la fórmula (15), se muestran en la Tabla 13:

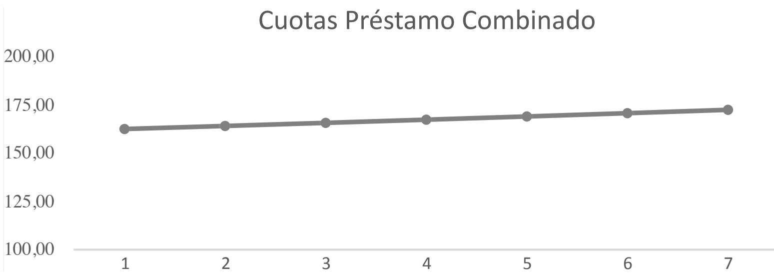
TABLA 13. PRÉSTAMO CUOTAS CONSTANTES CON PRÉSTAMO PROGRESIÓN GEOMÉTRICA

Variables	TIR	0	1	2	3	4	5	6	7
Cuotas Constantes	4,00%	-1.000,00	166,61	166,61	166,61	166,61	166,61	166,61	166,61
C. Progresión Geom.	4,00%	-1.000,00	148,57	154,51	160,69	167,12	173,81	180,76	187,99
Préstamo Combinado	4,00%	-1.000,00	161,99	163,56	165,17	166,80	168,47	170,18	171,91
Crecimiento Cuota	1,00%			0,97%	0,98%	0,99%	1,00%	1,01%	1,02%

Como se puede observar en la Tabla 13 en el nuevo préstamo combinado las cuotas son crecientes, aunque a una tasa menor que la tasa g del préstamo de cuotas en progresión geométrica. Sin embargo, las tasas de crecimiento de las cuotas no son constantes, sino que son variables y crecientes. Este tipo de préstamos, puede ser útil cuando se busca que las cuotas no crezcan a una tasa fija, sino que vayan creciendo a tasas crecientes, de modo que el esfuerzo financiero al inicio sea menor.

El perfil de los flujos de caja de las cuotas del préstamo combinado se muestra en la Figura 6:

FIGURA 6. PRÉSTAMO CUOTAS CONSTANTES CON PRÉSTAMO PROGRESIÓN GEOMÉTRICA



En la Tabla 14 se indican los valores obtenidos con diferentes valores factor de ponderación «w».

TABLA 14. PRÉSTAMO CUOTAS CONSTANTES CON PRÉSTAMO CUOTAS EN PROGRESIÓN GEOMÉTRICA. EVOLUCIÓN DE LAS CUOTAS SEGÚN VALOR DEL FACTOR DE PONDERACIÓN

Valor de "w"	Cuotas
=100%	Préstamo Cuotas Constantes
>50%-<100%	Predomina el Préstamo Cuotas Constantes. Cuotas crecientes con una pendiente de crecimiento más suave cuanto mayor es w
=50%	Pondera por igual el Préstamo Cuotas Constantes y el Préstamo Cuotas en Progresión Geométrica
>0%-<50%	Predomina el Préstamo Cuotas en Progresión Geométrica. Cuotas crecientes con una pendiente más pronunciada cuanto más pequeño es w
=0%	Préstamo Cuotas en Progresión Geométrica

g) Préstamo cuotas constantes con préstamo con cuotas crecientes igual a la tasa de interés

Con la combinación de un préstamo con cuotas constantes con un préstamo con cuotas crecientes igual a la tasa de interés conseguimos un préstamo combinado que sería un préstamo con cuotas crecientes, aunque con una pendiente más suave. Los resultados son similares a los del caso anterior del préstamo en progresión geométrica, y las tasas de crecimiento de las cuotas son también variables y crecientes.

La fórmula aplicable de este préstamo sería:

$$\textbf{(16)}\ a_k = \frac{C \cdot i}{1-(1+i)^{-n}} \cdot w + \frac{C}{n} \cdot (1+i)^k \cdot (1-w)$$

Los términos de dicha fórmula han sido previamente definidos en las ecuaciones (4) y (6).

Los resultados aplicando los inputs de la Tabla 2 y la fórmula (16), se muestran en la Tabla 15:

TABLA 15. PRÉSTAMO CUOTAS CONSTANTES CON PRÉSTAMO CUOTAS CRECIENTES TASA DE INTERÉS

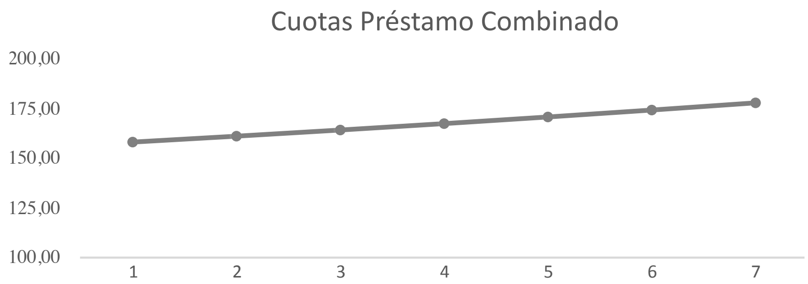
Variables	TIR	0	1	2	3	4	5	6	7
Cuotas Constantes	4,00%	-1.000,00	166,61	166,61	166,61	166,61	166,61	166,61	166,61
C. Crecientes Tasa Int.	4,00%	-1.000,00	148,57	154,51	160,69	167,12	173,81	180,76	187,99
Préstamo Combinado	4,00%	-1.000,00	157,59	160,56	163,65	166,87	170,21	173,68	177,30
Crecimiento Cuota	1,98%			1,89%	1,92%	1,96%	2,00%	2,04%	2,08%

Como se puede observar en la Tabla 15 en el nuevo préstamo combinado las cuotas son crecientes, aunque a una tasa menor que la tasa de interés del préstamo de cuotas crecientes tasa de interés. Las tasas de crecimiento de las cuotas no son constantes, sino que son variables y crecientes.

Este tipo de préstamo combinado puede ser útil cuando se busca disminuir el esfuerzo de pago en las primeras cuotas, y que las tasas de crecimiento de las cuotas en vez de ser constantes sean crecientes con el tiempo.

El perfil de los flujos de caja de las cuotas del préstamo combinado se muestra en la Figura 7:

FIGURA 7. PRÉSTAMO CUOTAS CONSTANTES CON PRÉSTAMO CUOTAS CRECIENTES TASA DE INTERÉS



En la Tabla 16 se indican los valores obtenidos con diferentes valores factor de ponderación «w».

TABLA 16. PRÉSTAMO CUOTAS CONSTANTES CON PRÉSTAMO CUOTAS CRECIENTES TASA DE INTERÉS. EVOLUCIÓN DE LAS CUOTAS SEGÚN VALOR DEL FACTOR DE PONDERACIÓN

Valor de "w"	Cuotas
=100%	Préstamo Cuotas Constantes
>50%-<100%	Predomina el Préstamo Cuotas Constantes. Cuotas crecientes con una pendiente de crecimiento más suave cuanto mayor es w
=50%	Pondera por igual el Préstamo Cuotas Constantes y el Préstamo Cuotas Crecientes Tasa de Interés
>0%-<50%	Predomina el Préstamo Cuotas Crecientes Tasa de Interés. Cuotas crecientes con una pendiente más pronunciada cuanto más pequeño es w
=0%	Préstamo Cuotas Crecientes Tasa de Interés

CONCLUSIONES

La regla financiera para combinaciones de préstamos definida por el autor del estudio, supone una gran oportunidad para el desarrollo de fórmulas analíticas de nuevas modalidades de préstamos.

El empleo de la regla financiera puede ser una gran herramienta para la innovación financiera por parte de las entidades financieras, y mejorar la personalización de los préstamos, con el fin de adaptar mejor las cuotas del préstamo, por ejemplo, a los ingresos o al flujo de caja disponible de los clientes o prestatarios.

El uso de fórmulas analíticas en los contratos de financiación supone una gran ventaja respecto a los métodos numéricos, en lo relativo a diversos aspectos como la flexibilidad en los préstamos referenciados a tipos de interés variable de adaptar el calendario de amortización del préstamo según las variaciones del tipo de interés, o la mayor seguridad jurídica de incluir en el contrato de financiación una fórmula analítica en vez de depender de un método numérico de una hoja de cálculo.

BIBLIOGRAFÍA

AVILES GARCÍA, F. (2001), *«Las Operaciones Financieras en los exámenes»,* Centro de Estudios Financieros, Madrid

BAQUERO LÓPEZ, M. J. y MAESTRO MUÑOZ, M. L. (2003), *«Problemas resueltos de Matemática de las Operaciones Financieras»,* Thomson Editores, Madrid

GARCÍA BOZA, J. ET AL. (2002), *«Problemas resueltos de Matemáticas de las Operaciones Financieras»,* Ediciones Pirámide, Madrid

GIL PELÁEZ, L. ET AL. (1993), *«Matemática de las Operaciones Financieras. Problemas resueltos»,* AC, Madrid

GONZÁLEZ CATALÁ, V. T. (1993), *«Operaciones Financieras, Bancarias y Bursátiles, Curso Práctico»,* Ediciones Ciencias Sociales, Madrid

GONZÁLEZ VELASCO, M. DEL C. (2008), *«Análisis de las Operaciones Financieras».* Editorial Aranzadi (Thomson-Civitas), Madrid

NIETO DE ALBA, U. (1985), *«Matemática Financiera y Cálculo Bancario»,* Centro de Formación del Banco de España, Madrid

PABLO LÓPEZ, A. DE, (2001), *«Manual práctico de matemática comercial y financiera: lógica financiera, rentas, operaciones a corto plazo»,* Editorial Centro de Estudios Ramón Areces, Madrid

POZO CARRERO, E y ZÚÑIGA RODRÍGUEZ, J. (1994), *«Análisis y formulación de las Operaciones Financieras»,* ESIC

RUIZ AMESTOY, J.M. (1990), *«Matemática financiera».* Centro de Formación del Banco de España, Madrid

Fernando Iniesta Soria, es economista, MBA IESE, Doctor en Finanzas, y miembro del IEAF, de EFPA y del Colegio de Economistas de Madrid.

Consultor Financiero, experto en modelización financiera y en valoración de empresas; así como en la realización de planes de negocio y estructuración financiera.

Ha realizado proyectos en diversos países de Europa, América y Asia asesorando a gobiernos e inversores privados como Fondos de Inversión en el ámbito financiero de proyectos de infraestructuras.

Su trayectoria profesional incluye haber sido consultor de infraestructuras en INDRA, y Jefe del Departamento de Análisis de Inversiones de ITINERE (SACYR), y actualmente trabaja en su propia consultora financiera CABOAZUL ASESORES FINANCIEROS.

Dentro de su ámbito profesional ha trabajado en la estructuración financiera de préstamos para proyectos. Siendo el objeto del estudio "Combinaciones de préstamos e innovación financiera" resultado de su investigación para mejorar la estructuración financiera de préstamos, y encontrar nuevas modalidades de préstamos que puedan ser comercializados por las entidades financieras.