Dolors Gil-Doménech

ANÁLISIS DEL CAOS EN SERIES TEMPORALES: PROPOSICIÓN DE UN TEST PARA LA TRANSITIVIDAD TOPOLÓGICA Y APLICACIÓN DEL MISMO A SERIES FINANCIERAS DE ÍNDICES BURSÁTILES

RESUMEN

En el presente trabajo se propone un nuevo test para detectar la presencia de transitividad topológica, característica propia de los sistemas caóticos, en series temporales. Asimismo, se simula el test aplicándolo a series no topológicamente transitivas. Por último, se aplica el test propuesto a series financieras formadas por valores de cierre de los índices bursátiles Standard & Poor's 500, FTSE 100, NIKKEI 225 e IBEX 35.

Palabras clave: caos, atractor caótico, transitividad topológica, índice bursátil
Códigos JEL: C22 G,1

ABSTRACT

In this paper, a new test is proposed to detect the presence of topological transitivity, a characteristic of chaotic systems, in time series. The test is first applied to series that are not topologically transitive, as a simulation. Finally, the proposed test is applied to financial series formed from the closing values of the stock indices Standard & Poor's 500, FTSE 100, NIKKEI 225 and IBEX 35.

Key words: chaos, chaotic attractor, topological transitivity, stock index
JEL Classification: C22, G21

Recibido: 9 de diciembre de 2015 **Aceptado: 27 de diciembre de 2015**

Universitat Internacional de Catalunya, Facultat de Ciències Econòmiques i Socials

1. INTRODUCCIÓN

La presencia de caos en un sistema permite la atribución de reglas deterministas a fenómenos que son en apariencia aleatorios, un determinismo que posibilita la predictibilidad sobre el comportamiento del sistema a corto plazo, dentro de un cierto rango. Sin embargo, debido a la sensibilidad a las condiciones iniciales propia de los sistemas caóticos, no es posible realizar predicciones sobre su comportamiento a medio y largo plazo. En este sentido, es habitual la búsqueda de caos en varios sistemas a través del análisis de series temporales obtenidas de los mismos, ya que la presencia de comportamientos caóticos justifica el uso de técnicas de previsión a corto plazo. Por ejemplo, en el ámbito financiero se sitúan en esta línea trabajos como los de Yousefpoor et al. (2008), que analizan los rendimientos de algunas acciones de la bolsa de Teherán; el de Shintani y Linton (2004), que buscan caos en el mercado de capitales estadounidense; los trabajos de Iseri et al. (2008) o de Özer y Ertokatli (2010), que se centran en la bolsa de valores de Estambul; o el de Webel (2012), quien trata de hallar caos en el mercado de capitales alemán.

Según Yousefpoor et al. (2008) la definición matemática del caos dada por Devaney (1989) proporciona las propiedades que pueden usarse como prerrequisitos de un comportamiento caótico. Estas características propias de los sistemas caóticos son la sensibilidad a las condiciones iniciales, la presencia de órbitas densas y la transitividad topológica. Las dos últimas características implican la presencia de una zona conocida como "atractor" hacia la que tienden las trayectorias del sistema, mientras que la sensibilidad a las condiciones convierte este atractor en caótico.

Actualmente existen varios test que tratan de buscar caos en series temporales, como son la dimensión de correlación, el test BDS, los exponentes de Lyapunov, el test de diferencias cercanas o el test 0-1, entre otros. Sin embargo, algunos de estos instrumentos no testan características propias del caos y otros testan tan solo alguna de las características pero no todas ellas. Además, Hu et al. (2005) aseguran que el test 0-1 propuesto por Gottwald y Melbourne (2004) no es aconsejable para el análisis de datos empíricos, pues demuestran que proporciona conclusiones erróneas en caso de que el sistema presente, además del caótico, otro tipo de comportamiento, lo cual es habitual en datos procedentes de la realidad.

La sensibilidad a las condiciones iniciales habitualmente se testa vía el exponente de Lyapunov, el cual caracteriza el radio de separación de dos trayectorias infinitesimalmente cercanas. Existen diversos modos de calcular este exponente, como los propuestos por Eckmann et al. (1986), Gencay y Dechert (1992), Nychka et al. (1992) o Wolf et al. (1999), entre otros.

La existencia de una órbita densa en un conjunto hace que, bajo la acción de la función de transición o cambio de estado, la órbita se mueva de una vecindad arbitraria a otra, de tal modo que se tienda a llenar el conjunto. La presencia de órbitas densas se analiza típicamente a través del test de diferencias cercanas, cuya base fue planteada por Eckmann et al. (1986). Pueden verse versiones detalladas del mismo, entre otros, en los trabajos de Gilmore (2001) o Yousefpoor et al. (2008).

Por lo que respecta a la propiedad de transitividad topológica, no se ha encontrado hasta el momento un test comúnmente aceptado que permita determinar si un sistema es topológicamente transitivo. Ello implica una gran limitación a la hora de realizar estudios sobre la dinámica caótica de una serie de observaciones, ya que impide que una de las propiedades de los sistemas caóticos pueda ser contrastada. Por ello algunos autores como, por ejemplo, Medio (1992) se basan en la idea de que la transitividad topológica implica la presencia de órbitas densas y, así, aseguran que es suficiente con testar la segunda propiedad para conocer la primera.

Sin embargo, y siguiendo de nuevo a Yousefpoor et al. (2008), la falta de un test para la transitividad topológica supone no poder tener en cuenta la definición de caos como base a la hora de detectar comportamientos caóticos.

Por lo anterior, en el presente trabajo se propone un algoritmo que permita analizar si un sistema posee transitividad topológica a partir de una serie de observaciones del mismo. Además, el algoritmo propuesto se ha aplicado a series temporales procedentes del mercado financiero. Este trabajo se complementa así con el realizado por Gil-Doménech y Alegre (2012), en el cual se estudiaba la presencia de caos en los índices bursátiles IBEX 35 y Standard&Poor's 500 a través del análisis de las características de presencia de órbitas densas y de sensibilidad a las condiciones iniciales.

El resto del trabajo se estructura de la siguiente manera: en el apartado 2 se detalla el algoritmo propuesto para la detección de transitividad topológica. Con el fin de simular el test propuesto, en el apartado 3 se aplica el mismo a series que no son topológicamente transitivas para estudiar la coherencia de los resultados. A continuación, en el apartado 4 se testa la transitividad topológica en series temporales financieras formadas por los valores de cierre de los índices bursátiles Standard & Poor's 500, FTSE 100, NIKKEI 225 e IBEX 35. Finalmente, en el apartado 5 se muestran las conclusiones obtenidas.

2. ALGORITMO PROPUESTO

La transitividad topológica implica que dentro del espacio de estados, esto es, el espacio en el que evoluciona la variable compuesta por mediciones de elementos del sistema, no existe ningún subconjunto por el cual no pueda pasar la trayectoria del sistema. En otras palabras, si el sistema es topológicamente transitivo, cualquier zona dentro del espacio de estados tiene que ser accesible por parte del sistema.

Antes de proceder con el algoritmo propuesto para testar la transitividad topológica cabe explicar que, cuando se analiza la presencia de caos en series temporales, resulta necesario realizar antes una inmersión de las mismas, la cual consiste en obtener vectores formados a partir de las observaciones de la serie retardadas en el tiempo. Con este paso se obtiene la estructura del sistema dinámico original que se pretende analizar a partir de la serie de observaciones del mismo. Para poder realizar la inmersión hace falta elegir un retardo y una dimensión óptimos. En el presente trabajo, a la hora de elegir la dimensión de inmersión se ha seguido a Takens (1981), quien asegura que la dimensión de inmersión óptima debe ser estrictamente superior al doble de la dimensión del objeto que se analiza. Por otro lado, el criterio para seleccionar el retardo idóneo ha partido de considerar que con el retardo óptimo la trayectoria realiza la máxima ocupación posible del espacio. Además, tras la inmersión de las series resulta conveniente hacer un análisis espectral singular para expresar las trayectorias de la serie en su base óptima, que es la que permite una mejor representación de las trayectorias.

Para determinar si un sistema es topológicamente transitivo, el algoritmo propuesto consiste en los siguientes pasos:

1. Con los confinamientos realizados, con la dimensión y retardos pertinentes, y con el cambio de base hecho, se mezclan los puntos y se separan en conjuntos, en nuestro caso de 100 datos[1].

2. Se toma un conjunto de puntos y se calculan las distancias euclídeas entre todo par de puntos $\vec{x}, \vec{y}$ del conjunto considerado del siguiente modo:

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left| x_i - y_i \right|^2}$$

A continuación se normalizan las distancias y se expresan en una matriz, que tiene ceros en la diagonal princi-

[1] Esto se hace por la magnitud del problema, siguiendo Montecarlo (simulación), que consiste en mezclar los puntos, dividirlos en conjuntos de igual número de datos, y calcular por secuenciación, de conjunto en conjunto. En cuanto dos resultados consecutivos difieran en menos de un épsilon prefijado, entonces se para el proceso y se toma el último resultado como válido, por considerar que se ha llegado a un grado satisfactorio de convergencia.

pal y es simétrica, por lo que sólo será necesario calcular el triángulo superior de la misma.

3. Se calculan y representan tanto la función de densidad de estas distancias como la de distribución.

4. Se busca el máximo valor y el mínimo de la serie temporal en el conjunto considerado, y se generan puntos idénticamente distribuidos con valores comprendidos entre ese máximo y mínimo a partir de una distribución uniforme.

5. Se sigue el mismo procedimiento que para la serie objeto de estudio, hasta obtener la función de densidad y la función de distribución de las distancias de los puntos distribuidos uniformemente.

6. Se añade un nuevo conjunto de datos a los que se habían tomado anteriormente y se repite el procedimiento. Y así sucesivamente hasta que las funciones de densidad y distribución difieran de las obtenidas anteriormente en menos de un épsilon prefijado, en nuestro caso de 10^{-5}.

7. Se representan las funciones de densidad y de distribución tanto de las distancias de la serie original como de la uniforme. En el eje vertical de los gráficos aparecen los valores que toman estas funciones, mientras que en el horizontal aparecen valores del 0 al 100, que representan el número de intervalos en los que se han dividido las funciones para su representación. Bajo cada gráfico aparecen especificados dentro de un intervalo el valor mínimo y máximo que toman las distancias normalizadas, que se corresponden respectivamente con el valor 0 y 100 del eje horizontal. Asimismo, dividiendo entre 100 la diferencia entre el valor mínimo y máximo de las distancias normalizadas se determina el salto de un intervalo a otro.

8. Se comparan las funciones de distribución de las distancias de la serie original y la uniforme aplicando el test de Kolmogorov-Smirnov, el cual permite determinar la bondad de ajuste de dos distribuciones entre sí. En el caso de que tras la aplicación del test se obtenga un p-value superior o igual a un nivel de significación prefijado se aceptará la hipótesis nula de que una distribución se ajusta a la otra.

El anterior algoritmo testa la transitividad topológica de un modo atemporal, por lo que no puede deducirse de ésta la presencia de órbitas densas. Así, será necesario complementar el algoritmo anterior con otro que teste la presencia de órbitas densas. En caso de que una serie temporal presente atractor, ambas propiedades tendrán que cumplirse.

3. SIMULACIÓN DEL TEST

Con el fin de comprobar la coherencia del algoritmo propuesto, se ha hecho lo siguiente: en los puntos uniformemente distribuidos se han reemplazado algunos puntos por otros acumulados en una zona del espacio de estados y así la serie deja de cumplir la propiedad de transitividad topológica. Concretamente, se han reemplazado un 10%, un 20% y un 30%, respectivamente, del número de confinamientos por puntos obtenidos sumando una pequeña oscilación a la media entre el máximo valor y el mínimo valor de los datos originales. Tras la aplicación del algoritmo propuesto a las tres series generadas debería obtenerse un p-value pequeño, que lleve a rechazar la hipótesis nula de que las funciones se distribuyen de modo parecido. Además, para que pueda aceptarse la simulación como coherente, el p-value obtenido deberá ser menor (más lejos de ser aceptada la hipótesis nula) a más puntos se hayan reemplazado de la serie uniforme, ya que ello implica alejarse más de la transitividad topológica.

Comparando las distribuciones anteriores, que llamaremos conglomeradas, por presentar datos acumulados en una zona, con la distribución uniforme, se obtienen los gráficos que se muestran en la Figura 1, la Figura 2 y la Figura 3.

La aplicación del test de Kolmogorov-Smirnov a las distribuciones anteriores da lugar a los resultados que se muestran en la Tabla 1[2].

Como cabía esperar, el p-value que se obtiene es pequeño en todos los casos analizados, y es más pequeño a mayor número de puntos conglomerados. Por lo anterior, puede deducirse que el test propuesto para la transitividad topológica da lugar a resultados coherentes.

4. APLICACIÓN DEL TEST A SERIES TEMPORALES FINANCIERAS

En el presente apartado se procede a analizar la transitividad topológica en distintas series temporales financieras formadas por los valores de cierre de diversos índices bursátiles. Concretamente, se estudian los índices Standard & Poor's 500, FTSE 100, NIKKEI 225 e IBEX 35[3].

Teniendo en cuenta el criterio establecido para la elección de la dimensión de inmersión se ha escogido para todas las series una dimensión de 3. Asimismo, se han elegido como retardos óptimos, por ser aquellos a partir de los cuales las trayectorias presentan mayor ocupación del espacio en la dimensión considerada, los que aparecen en la Tabla 2. Una vez elegida la dimensión y el retardo óptimo, se han realizado las inmersiones de las series, y seguidamente se ha aplicado un análisis espectral singular para expresar las trayectorias en su base óptima.

Debido a que, con el paso anterior, se ha observado que todas las series presentan un comportamiento que parece errático y que puede deberse a la presencia de un atractor al final de sus trayectorias, que corresponde aproximadamente a las 3000 últimas observaciones, se ha decidido analizar la transitividad topológica tan solo de esas 3000 últimas observaciones, que pertenecen al periodo comprendido entre febrero y agosto de 1997. Teniendo en cuenta que se dispone de un número distinto de observaciones de las series, resulta además conveniente analizar un mismo número de observaciones de todas ellas, para que los resultados sean más fácilmente comparables.

Una vez las series están confinadas y expresadas en su base óptima vía el análisis espectral singular, puede procederse a testar la presencia de transitividad topológica. Tras la aplicación del algoritmo propuesto en los 3000 últimos datos de los índices analizados, se obtienen dos gráficos para cada serie financiera: en el primero se muestran las funciones de densidad de las distancias del índice (en verde) y de la distribución uniforme (en azul), y en el segundo las funciones de distribución de estas mismas distancias. Las Figuras 4, 5, 6 y 7 muestran los gráficos resultantes de la aplicación del algoritmo en las series temporales financieras objeto de análisis.

Con el objeto de comparar las distribuciones anteriores estadísticamente, se aplica el test de Kolmogorov-Smirnov, obteniéndose los resultados que se observan en la Tabla 3. En esta tabla puede comprobarse cómo tras la aplicación del test de Kolmogorov-Smirnov el p-value que se obtiene en todas las series es elevado, lo cual lleva a aceptar la hipótesis nula de que ambas funciones se distribuyen de un modo parecido y por ello que las series parecen presentar transitividad topológica.

5. CONCLUSIONES

El algoritmo propuesto para testar la transitividad topológica ha proporcionado resultados coherentes en

[2] Esto Para la aplicación de este test se ha utilizado el software The R-Project for Statistical Computing y, más concretamente, la instrucción ks.test que se halla en el mismo. Para una visión más detallada del programa para la aplicación de este test, pueden consultarse la página principal del proyecto R: http://www.r-project.org/ o bien el artículo de Ihaka y Gentleman (1996).

[3] El estudio se realiza sobre un total de 14926 datos del Standard & Poor's 500, con los valores de cierre desde el 3/1/1950 hasta el 30/4/2009; 6334 datos del FTSE 100, con los valores de cierre del 4/4/1984 hasta el 30/4/2009; 6228 datos del NIKKEI 225, con los valores de cierre del 6/1/1984 hasta el 30/4/2009; y 3586 datos del IBEX 35, con los valores de cierre del 2/1/1995 hasta el 30/4/2009.

las series no topológicamente transitivas generadas a partir de la acumulación de puntos en series uniformes, a las cuales se ha llamado series conglomeradas. A mayor sea el número de puntos acumulados en una zona del espacio de estados de la serie uniforme, mayor debe ser la diferencia entre las funciones de distribución de las distancias de la serie uniforme original y la uniforme conglomerada, y por ello con mayor rotundidad cabe rechazar la propiedad de transitividad topológica. Efectivamente, esto se ha visto reflejado en el p-value que ha proporcionado el test, que, siendo pequeño (y por ello rechazable la hipótesis nula) en el caso de todas las series conglomeradas, ha ido decreciendo cuanto mayor era ese conglomerado.

Por otro lado, de los resultados obtenidos de la aplicación del test propuesto a las series temporales financieras puede deducirse que es posible que como mínimo los últimos 3000 datos de los índices bursátiles, que corresponden al periodo comprendido entre febrero y agosto de 1997, se hallen dentro de un atractor. Sin embargo, para poder asegurar la presencia de las series en el atractor será necesario complementar este análisis con un test de órbitas densas. En caso de que efectivamente exista un atractor en las series formadas por las observaciones de los índices, y de que este sea caótico, se podrá pasar de una concepción de mercado puramente aleatoria a una caótica, lo cual justifica el uso de técnicas de previsión a corto plazo.

El test propuesto para la transitividad topológica resulta complementario al proceso descrito en el trabajo de Gil-Doménech y Alegre (2012), en el cual se analizaban las otras dos características (sensibilidad a las condiciones iniciales y presencia de órbitas densas) propias de los sistemas caóticos.

El hecho de disponer de un test como el propuesto permite poder tener en cuenta la definición de caos como base para detectar comportamientos caóticos, algo que Yousefpoor et al. (2008) indicaron como necesario para poder realizar un análisis caótico integral.

6. REFERENCIAS

Devaney, R.L., 1989: An Introduction to Chaotic Dynamical Systems (2nd edn). Menlo Park California: Addison-Wesley.

Eckmann, J.-P. et al., 1986: Lyapunov exponents from time series, Physical Review A 34, 4971-4979.

Gencay, R. and Dechert, W.D., 1992: An algorithm for the n Lyapunov exponents of an n-dimensional unknown dynamical system, Physica D 49, 142-157.

Gil-Doménech, D. y Alegre, A., 2012: Análisis caótico vía el estudio de atractores. Aplicación a series financieras de los índices bursátiles IBEX 35 y Standard&Poor's 500, Análisis Financiero 120, 82-90.

Gilmore, C.G., 2001: An examination of nonlinear dependence in exchange rates, using recent methods from chaos theory, Global Finance Journal 12, 139-151.

Gottwald, G.A. and Melbourne, I., 2004: A new test for chaos in deterministic systems, Proceedings of the Royal Society of London A 460, 603-611.

Hu, J. et al., 2005: Reliability of the 0-1 test for chaos, Physical Review E 72 (5), 1-5, article ID 056207.

Ihaka, R. and Gentleman, R., 1996: R: a language for data analysis and graphics, Journal of Computational and Graphical Statistics 5, 299-314.

Iseri M. et al., 2008: A model proposal for the chaotic structure of Istanbul stock exchange, Chaos, Solitons & Fractals 36, 1392-1398.

Medio, A., 1992: Chaotic Dynamics: Theory and Applications to Economics. Cambridge: Cambridge University Press.

Nychka, D. et al., 1992: Finding chaos in noisy systems, Journal of the Royal Statistical Society B 54 (2), 399-426.

Özer, G. and Ertokatli, C., 2010: Chaotic processes of common stock index returns: An empirical examination on Istanbul Stock Exchange (ISE), African Journal of Business Management 4 (6), 1140-1148.

Shintani, M. and Linton, O., 2004: Nonparametric neural network estimation of Lyapunov exponents and a direct test for chaos, Journal of Econometrics 120, 1-33.

Takens, F., 1981: Detecting Strange Attractors in Turbulence, Lecture Notes in Mathematics 898, 366-381. Springer-Verlag.

Webel, K., 2012: Chaos in German stock returns - New evidence from the 0-1 test, Economics Letters 115, 487-489.

Wolf, A. et al., 1985: Determining Lyapunov exponents from a time series, Physica D 16, 285-317.

Yousefpoor, P. et al., 2008: Looking for systematic approach to select chaos tests, Applied Mathematics and Computation 198, 73-91.

GRÁFICOS Y TABLAS

RESPECTIVAMENTE, FUNCIONES DE DENSIDAD Y FUNCIONES DE DISTRIBUCIÓN DE LAS DISTANCIAS DE LA DISTRIBUCIÓN CONGLOMERADA UN 10% (EN AZUL) Y DE LA DISTRIBUCIÓN UNIFORME (EN VERDE)

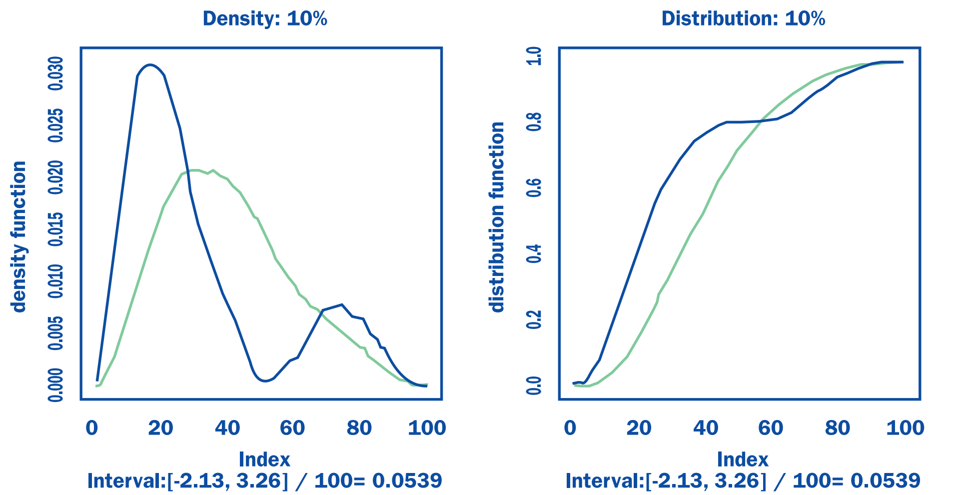

FIGURA 1

RESPECTIVAMENTE, FUNCIONES DE DENSIDAD Y FUNCIONES DE DISTRIBUCIÓN DE LAS DISTANCIAS DE LA DISTRIBUCIÓN CONGLOMERADA UN 20% (EN AZUL) Y DE LA DISTRIBUCIÓN UNIFORME (EN VERDE)

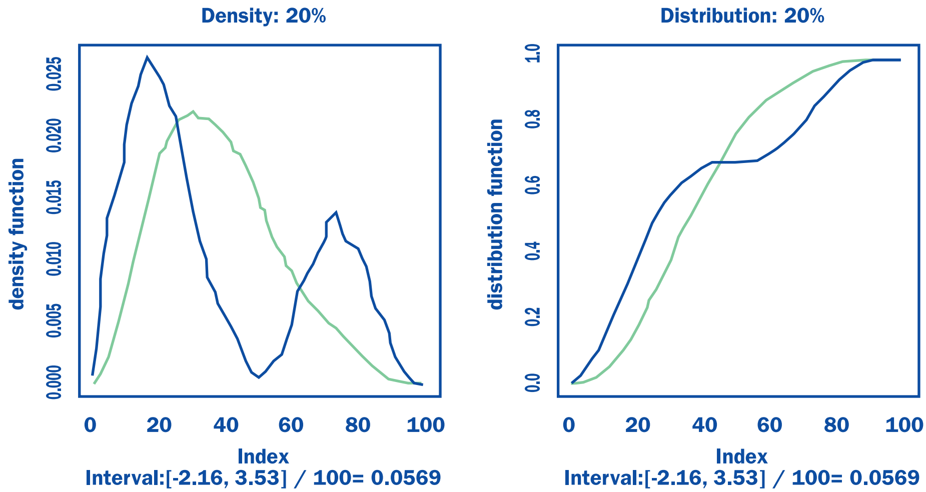

FIGURA 2

RESPECTIVAMENTE, FUNCIONES DE DENSIDAD Y FUNCIONES DE DISTRIBUCIÓN DE LAS DISTANCIAS DE LA DISTRIBUCIÓN CONGLOMERADA UN 30% (EN AZUL) Y DE LA DISTRIBUCIÓN UNIFORME (EN VERDE)

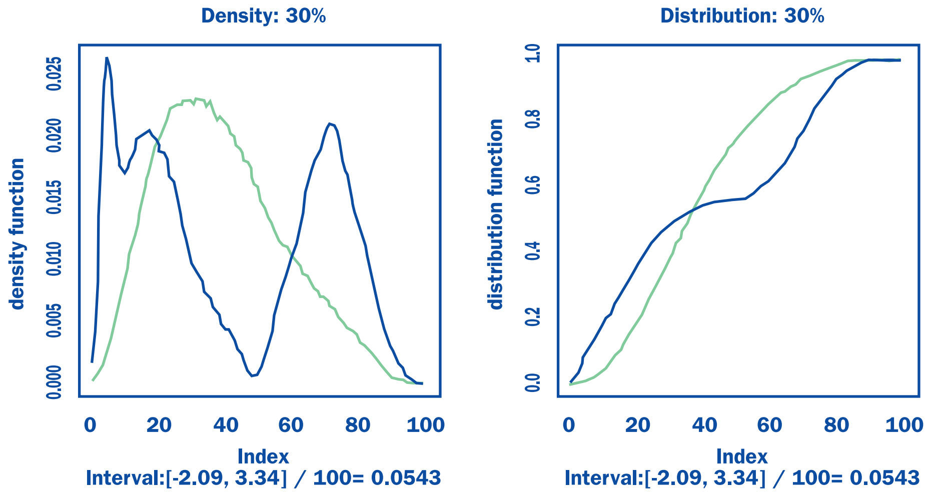

FIGURA 3

RESULTADOS DE LA APLICACIÓN DEL TEST KOLMOGOROV-SMIRNOV EN LAS SERIES CONGLOMERADAS

Serie	Test Kolmogorov-Smirnov
Conglomerada 10%	D = 0.1591, p-value = 0.1370
Conglomerada 20%	D = 0.1766, p-value = 0.08234
Conglomerada 30%	D = 0.2041, p-value = 0.03350

TABLA 1

RETARDOS ÓPTIMOS DE CADA SERIE TEMPORAL

Índice	Retardos óptimos
S&P 500	99
FTSE 100	95
NIKKEI 225	83
IBEX 35	89

TABLA 2

RESPECTIVAMENTE, FUNCIONES DE DENSIDAD Y FUNCIONES DE DISTRIBUCIÓN DE LAS DISTANCIAS DE LA SERIE DEL ÍNDICE STANDARD & POOR'S 500 Y DE LA DISTRIBUCIÓN UNIFORME

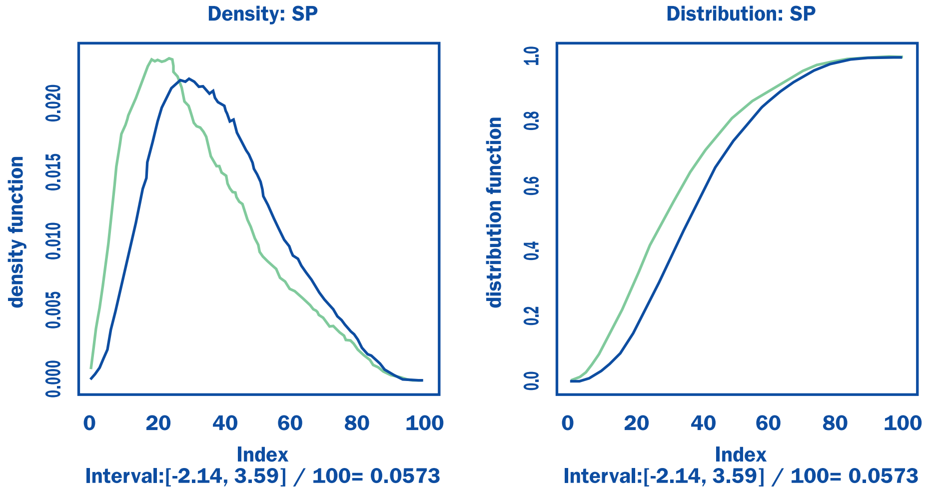

FIGURA 4

RESPECTIVAMENTE, FUNCIONES DE DENSIDAD Y FUNCIONES DE DISTRIBUCIÓN DE LAS DISTANCIAS DE LA SERIE DEL ÍNDICE FTSE 100 Y DE LA DISTRIBUCIÓN UNIFORME

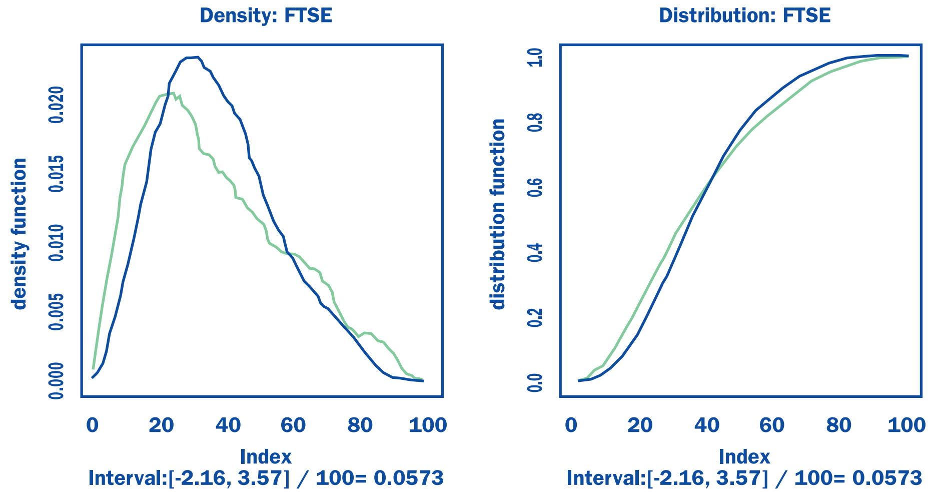

FIGURA 5

RESPECTIVAMENTE, FUNCIONES DE DENSIDAD Y FUNCIONES DE DISTRIBUCIÓN DE LAS DISTANCIAS DE LA SERIE DEL ÍNDICE NIKKEI 225 Y DE LA DISTRIBUCIÓN UNIFORME

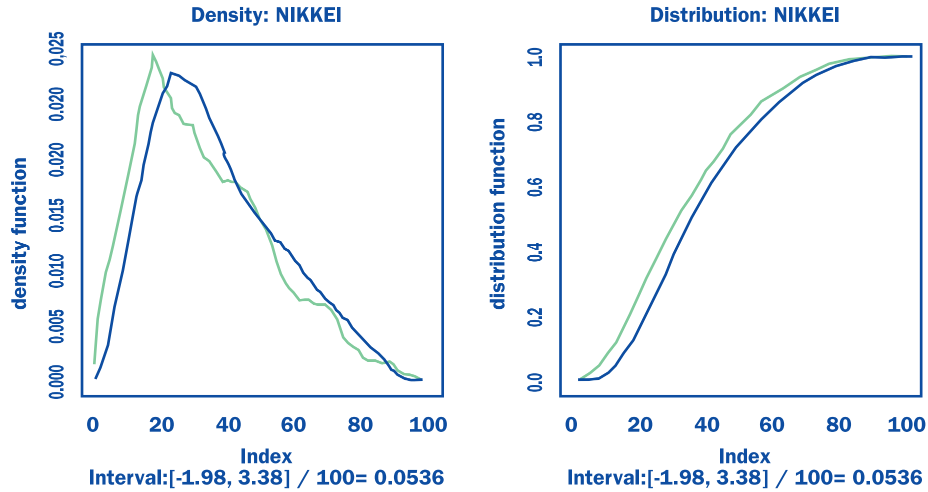

FIGURA 6

RESPECTIVAMENTE, FUNCIONES DE DENSIDAD Y FUNCIONES DE DISTRIBUCIÓN DE LAS DISTANCIAS DE LA SERIE DEL ÍNDICE IBEX 35 Y DE LA DISTRIBUCIÓN UNIFORME

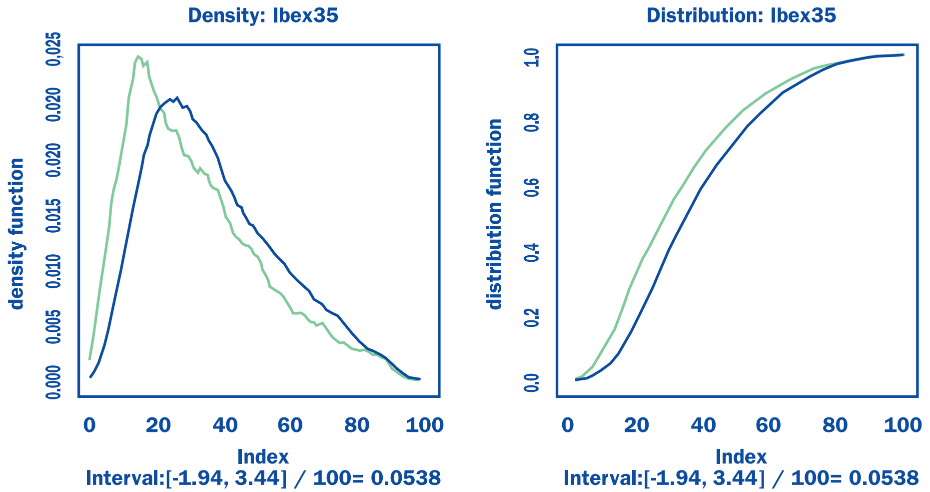

FIGURA 7

RESULTADOS DE LA APLICACIÓN DEL TEST KOLMOGOROV-SMIRNOV EN LAS SERIES TEMPORALES

Serie	Test Kolmogorov-Smirnov
S&P 500	D = 0.0816, p-value = 0.902
FTSE 100	D = 0.0646, p-value = 0.975
NIKKEI 225	D = 0.0634, p-value = 0.979
IBEX 35	D = 0.0707, p-value = 0.967

TABLA 3